5.Оценка устойчивости САР**.**

 Устойчивость – это свойство системы возвращаться в исходное состояние после вывода ее из этого состояния и прекращения действия возмущения.

Устойчивость является очень важной характеристикой качества систем и устройств, применяемых в самых различных областях техники.

Условия устойчивости формулируются в виде различных критериев устойчивости, каждый из которых применяют в зависимости от того, какими исходными характеристиками и данными располагают.

 Для САР второго порядка – устойчивость оценивать по корням характеристического уравнения, 3-ого порядка – по критерию Вишнеградского, 4-ого порядка по критерию Гурвица, 5-ого порядка по критерию Михайлова.

5.1 Устойчивость САР (2-ого порядка оценивается по корнам характеристического уравнения. Характеристическое уравнение САР образуется путём приравнивания собственного оператора САР нулю, т.е. D() = 0

Для системы 2го порядка собственный оператор имеет вид:

D()=+p+= 0;

Решаем характеристическое уравнение

+p+=0,

Находим корни =, где D=-4

 Если действительные корни или действительные части комплексных корней отрицательны, то система устойчива.

 Если хотя бы один действительный корень или действительная часть одного комплексного корня равна 0, а остальные отрицательны; то эта система находится на границе устойчивости.

5.2 Устойчивость САР третьего порядка оценивают с помощью критерия Вышнеградского.

Порядок применения Вишнеградского

Собственный оператор САР D()=++приравнивают нулю:

++= 0;

Последнее уравнение приводят к виду:

++= 0,

где ;

 ;

САР устойчива, если A > 0, B > 0, AB > 1.

Основным достоинством рассматриваемого критерия, является возможность установить вид переходного процесса для этого на диаграмме Вишнеградского (рисунок 9) наносят точку О с координатами (A; B). Если точка попадает в область 1 – то переходные процесс имеет колебательный характер. Если точка попадает в область 2, то переходной процесс являются апериодическим, а в область 3, то переходной процесс является монотонным.



О

Рисунок 13.

Пример:

Собственный оператор САР D()=++

Значение коэффициентов САР:

Вычисляем коэффициенты собственного оператора САР:

=20·7,5=130;

;

.

Тогда D () =++;

Вычисляем коэффициенты А и В:

A =

B=

Получим уравнение ++= 0;

Так как A = 11,11 > 0, B = 2,92 > 0 и AB = 16,22 > 1, следовательно САР устойчива. Построим на диаграмме Вишнеградского точку О ( 5,55; 2,92 ). Она лежит в области 1, следовательно переходной процесс имеет колебательный характер.

5.3 Устойчивость САР 4-ого порядка оцениваем по критерию Рауса-Гурвицы.

Для оценки устойчивости используется собственный оператор САР записанный в виде:

 D(p) = ++

Заметим, что все коэффициенты D(p) должны быть положительными.

Согласно критерию Гурвицы, чтобы динамическая система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы главный определитель Гурвицы и все его диагональные миноры были положительны.

Определитель Гурвицы обозначается Δ и строится из коэффициентов собственного оператора САР по алгоритму:

1) по главной диагонали определителя Гурвицы слева направо выставляются все коэффициенты собственного оператора САР характеристического уравнения ;

2) от каждого элемента диагонали вверх и вниз достраиваются столбцы определителя так, чтобы индексы убывали сверху вниз;

3) на место коэффициентов с индексами меньше нуля или больше **n** ставятся нули.

Диагональный минор 1-го порядка формируется из первой строки и первого столбца, 2-го порядка – из первых двух строк и первых двух столбцов и т.д.

Составим главный определитель Гурвицы и все его диагональные миноры для САР 4-го порядка. В этом случае собственный оператор САР имеет вид:

D (p) =+++.

Главный определитель Гурвицы:

=

Диагональные миноры:

=

;

**Пример**. Оценить устойчивость замкнутой системы 4-го порядка по критерию Гурвица.

Передаточная функция разомкнутой САР в численных коэффициентах имеет вид:

Найдём передаточную функцию замкнутой САР:

 ;

Далее определим собственный оператор САР:

D(s) = A(s) + B(s) = 2s4 + 3s3 + s2 + 2s3 + 9s2 + 6s + 1 = 2s4 + 5s3 + 10s2 + 6s + 1.

Поскольку степень полинома D(p) n = 4, то матрица главного определителя Гурвица будет иметь размер 4х4.

 Тогда главный определитель Гурвица при а4 = 1, а3 = 6, а2 = 10, а1 = 5, а0 = 2 примет вид:

Δ =

Вычислим диагональные миноры:

Δ1 = 5 > 0,

;

Δ4 = 1 Δ3 = 1209 > 0.

 Поскольку все определители положительны, то САР **устойчива**.

Не обязательно считать все миноры, так как, если Δ3 больше нуля , то и все остальные миноры и главный определитель Гурвица будут положительны.

Действительно, можно представить главный определитель Гурвица через миноры.

так как, , то если значит, и . С другой стороны, когда ,то и , а это значит что . Первый диагональный минор тоже больше нуля.

Раскроем минор через коэффициенты собственного оператора САР D(p).

Получим окончательно условие устойчивости для САР 4-го порядка примет вид:

0

Для рассматриваемой САР имеем :

САР устойчива.

5.4. Оценка устойчивости САР по критерию Михайлова

Согласно этого критерия выделяем характеристический полином замкнутой САР:

.

Замена = iw, приводит к комплексному полиному, называемому функцией Михайлова:

где ;

 ) – мнимая функция;

 (w) – фаза

При изменении частоты конец вектора будет описывать некоторую кривую в комплексной плоскости, которая называется годографом Михайлова.

При изменении частоты от 0 до ∞ угол поворота вектора вокруг начала координат составит:

**∆**Arg= (n-2m),

где m число корней полинома с положительной действительной частью.

Если m = 0, то

=.

Последнее является необходимым условием устойчивости, но не достаточным. Для того, чтобы получить необходимое и достаточное условие устойчивости, необходимо исключить корни, лежащие на мнимой оси.

 Для того, чтобы система автоматического управления была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы годограф Михайлова при изменении от 0 до ∞ повернулся, не проходя через нуль, вокруг начала координат против часовой стрелки на угол , где - порядок характеристического уравнения.

Для устойчивых систем годограф Михайлова начинается при на вещественной полуоси, т.е. = ; кроме того с ростом частоты фазы должна монотонно возрастать, т.е. вектор должен поворачивать только против часовой стрелки, так как возрастают фазы элементарных вектор (), являющиеся слагаемыми фазы вектора

 Годограф Михайлова для устойчивых систем имеет плавную спиралевидную форму и уходит в бесконечность в том квадранте, номер которого равен степени характеристического уравнения (рис.14)

В связи с этим критерий устойчивости можно сформулировать следующим образом :

Из полинома в знаменателе передаточной функции АСР (характеристического полинома) образуется функция Михайлова. Для того, чтобы система автоматического управления была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы годограф Михайлова при изменении частоты от 0 до ∞, начинаясь при на вещественной положительной полуоси, обходил только против часовой стрелки последовательно n квадрантов координатной плоскости, где n- порядок характеристического уравнения.

n *= 1*

n *= 4*

n *= 2*

n = 3

n = *5*

V

U

Рисунок 14 Годограф Михайлова

Признаком неустойчивости системы является нарушение числа и последовательности прохождения квадрантов.

Примеры годографа Михайлова для неустойчивых систем представлены на рисунке 15.

 Для нейтральных систем годограф Михайлова изображён на рисунке 16. В первых двух случаях небольшие деформации выводят систему на устойчивость, в последнем же система неустойчива.

V

V

V

U

U

U

а)

б)

в)

n = 3

n *= 3*

n *= 3*

Рисунок 15 - Годографы Михайлова для неустойчивых систем:

а - начинается на отрицательной действительной полуоси;

б - не обходит n - квадрантов координатной оси;

в - не охватывает начало координат.

V

U

V

U

V

U

а)

б)

в)

n *= 4*

n *= 4*

n *= 4*

Рисунок 16 - Годограф Михайлова нейтральных систем:

а, б – система может быть устойчива; в – система неустойчива.

Пример .

Исследовать устойчивость системы критерием Михайлова, если характеристический полином системы имеет вид:

Принимаем а0 = а1 = а2 =а3 =а4= а5 =1

Выполнив замену p=i∙w , получим комплексный полином

D(iw) ==U(w)+i

где U(w)= - вещественная функция Михайлова,

 - мнимая функция Михайлова.

Построение годографа Михайлова производится методом контрольных точек. Он сводится к определению ряда точек годографа, соответствующих фиксированным значениям частоты. Значение U(w), при изменении частоты w от 0 до ∞ приведены в таблице 6.

Таблица 6

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| W | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,33 | 0,4 | 0,5 | 0,7 | 0,8 | 1 |
| U | 1 | 0,99 | 0,96 | 0,33 | 0,866 | 0,8 | 0,75 | 0,77 | 1 |
| V | 0 | 0,099 | 0,19 | 0,33 | 0,346 | 0,4 | 0,5 | 0,62 | 1 |

Рисунок 17 - Годограф Михайлова

При изменении частоты конец вектора D(iw) описывает некоторую кривую ( рисунке 17) и не проходит против часовой стрелки последовательно 5 квадрантов, это значит, что система неустойчива.